BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О РЕШЕНИЯХ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф.С.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
farmanaliyev@mail.ru

В настоящей статье рассматривается уравнение общего вида:

$$Ly \equiv \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_p} a_{kp} x^{k+p} y^{(k)}(x) = 0 \qquad (1)$$

$m_n > m_p > 0,\ p = 0,1\ldots,n-1,\ a_{m_n n} \neq 0\ \ a_{00} \neq 0$ *в пространстве обобщенных функций* $\left(S_0^{\beta}\right)'$, *с некоторым* $\beta > 1$. *В этом пространстве строится фундаментальная система решений уравнения (1).*

Обозначим через Ω и Ω_0, соответственно, совокупность всех решений и решений сосредоточенных в точке $x = 0$ уравнения (1) в пространстве $\left(S_0^{\beta}\right)'$ с некоторым $\beta > 1$. Очевидно, что $\Omega_0 \subset \Omega$.

Теорема1. Размерность подпространства решений Ω_0 в пространстве $\left(S_0^{\beta}\right)'$ $(1 < \beta < r_0)$ равна n.

Доказательство. Пусть

$$y(x) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q \delta^{(q)}(x). \qquad (2)$$

При условии сходимости ряда (2) это выражение является общим видом функционала в $\left(S_0^{\beta}\right)'$, сосредоточенного в точке $x = 0$. Для доказательства теоремы достаточно выяснить, сколько в разложении (2) свободных констант c_q, таких, что выражение (2), коэффициенты c_q которого определены через эти свободные константы, являются решением уравнения (1). Вычислим выражение

$$L[\sum_{q=0}^{\infty} c_q \delta^{(q)}(x)] = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_p} a_{kp} x^{k+p} [\sum_{q=0}^{\infty} c_q \delta^{(q)}(x)]^{(k)} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_p} a_{kp} c_{q+p} (-1)^{k+p} [q+k+p]_{k+p}\, \delta^{(q)}(x).$$

Если предположить теперь, что выражение (2) является решением уравнения (1), для определения c_q в силу линейной независимости $\delta^{(q)}(x)$ при различных q, получаем следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{p=0}^{n} \mathrm{D}_p(q)c_{q+p} = 0,\ q = 0,1,2,\cdots \tag{3}$$

где

$$\mathrm{D}_p(q) = \sum_{k=0}^{m_p} a_{kp}(-1)^{k+p}[q+k+p]_{k+p}, \quad [q]_\rho = q(q-1)\dots(q-\rho+1).$$

Степень многочлена $\mathrm{D}_p(q)$ обозначим через d_p. Очевидно, $d_p = m_p + p$, и, в силу наших предположений, $d_n > d_p$, $p = 0,1,\dots,n-1$.

Заметим, что задавая $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ произвольно из реккурентной системы (3) определяем последующие c_q $(q = n, n+1, \dots)$, так, что с этими коэффициентами ряд (2) сходится в $\left(S_0^\beta\right)'$ с некоторым $\beta > 1$ и эти ряды определяют n линейно независимых решений уравнения (1) сосредоточенных в начале координат.

Этим доказана теорема 1.

Обозначим через $A_p(\lambda)$, $B_p(\lambda)$ и $R_p(\lambda)$ следующие выражения

$$A_p(\lambda) = \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E(\frac{p}{2})} R_p(\lambda), \quad B_p(\lambda) = \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E(\frac{p+1}{2})} R_p(\lambda),$$

$$R_p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_p} a_{kp}[\lambda - p]_k.$$

Многочлен $R_n(\lambda)$ назовем характеристическим многочленом уравнения (1).

Теорема 2. Если корни характеристического многочлена $R_n(\lambda)$ не являются обобщенно кратными (и эти корни не сравнимы по модулю n с числами $0,1,\dots,n-1$), тогда уравнение (1) в пространстве $\left(S_0^\beta\right)'$ с некоторым $\beta > 1$ имеет $2m_n + n$ линейно независимых решений вида

$$y(x) = \sum_\lambda \xi_\lambda f^\lambda(x) + \sum_\lambda \eta_\lambda g^\lambda(x), \tag{4}$$

где индекс суммирования λ принимает значения из арифметических прогрессий с разностью n, построенных над корнями многочлена $R_n(\lambda)$.

Доказательство. Используя формулы дифференцирования и умножения на степени x некоторых обобщенных функций [2] вычислим выражение $L[y]$. При введенных обозначениях $L[y]$ запишется в виде:

$$L[y] = \sum_\lambda \Big[\sum_{p=0}^{n}{}'' A_p(\lambda)\xi_{\lambda-p} + \sum_{p=0}^{n}{}' A_p(\lambda)\eta_{\lambda-p}\Big] f^\lambda(x) +$$

$$+\sum_{\lambda}[\sum_{p=0}^{n}{}'' B_p(\lambda)\eta_{\lambda-p}+\sum_{p=0}^{n}{}' B_p(\lambda)\xi_{\lambda-p}]g^{\lambda}(x).$$

Если предположить, что $y(x)$ является решением уравнения (1), ввиду линейной независимости $f^{\lambda}(x)$ и $g^{\lambda}(x)$ при различных λ, для определения коэффициентов ξ_λ и η_λ получаем следующую алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{p=0}^{n}{}'' A_p(\lambda)\xi_{\lambda-p}+\sum_{p=0}^{n}{}' A_p(\lambda)\eta_{\lambda-p}=0 \qquad (5)$$

$$\sum_{p=0}^{n}{}'' B_p(\lambda)\eta_{\lambda-p}+\sum_{p=0}^{n}{}' B_p(\lambda)\xi_{\lambda-p}=0\ . \qquad (6)$$

Здесь два штриха и один штрих над знаком суммы означает, что суммирование распространяется по четным и нечетным p, соответственно. Теперь задача заключается в том, как найти $(2m_n+n)$ решения системы (5)-(6), такие, что ряды (4) с этим найденными коэффициентами ξ_λ и η_λ (решения системы (5)-(6)) являются сходящимся и определяют $(2m_n+n)$ линейно независимых решений уравнения (1).

Предположим, пока, что n четное. В этом случае степени a_n и b_n многочленов $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ равны между собой, а именно $a_n=b_n=(m_n+\frac{n}{2})$. Из структуры многочленов $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ видно, что при четном n числа $1,3,\ldots,(n-1)$ являются корнями многочлена $A_n(\lambda)$, а числа $0,2,\ldots,(n-2)$ являются корнями многочлена $B_n(\lambda)$. Остальные m_n корни многочленов $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ общие, они являются корнями характеристического уравнения $R_n(\lambda)=0$. По уже проведенным соображениям, учитывая наличие корней вида $(1,3,\ldots,n-1)$ и $(0,2,\ldots,n-2)$ у многочленов $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$, соответственно, коэффициенты $\xi_{1-n},\xi_{3-n},\ldots\xi_{(n-1)-n},\eta_{0-n},\eta_{2-n},\ldots,\eta_{(n-2)-n}$, объявляем свободными. Все значения ξ_λ и η_λ, находящиеся на арифметических прогрессиях, построенных над числами $\xi_{-1},\xi_{-3},\ldots\xi_{-(n-1)},\eta_{-2},\eta_{-4},\ldots,\eta_{-n}$ с разностью n, находим из систем (5), (6) в зависимости от объявленных свободных коэффициентов.

Из уравнения (5) при $\lambda=1$, а из уравнения (6) при $\lambda=0$ имеем:

$$\begin{cases} A_0(1)\xi_1+A_1(1)\eta_0=0 \\ B_0(0)\eta_0=0\ . \end{cases}$$

В силу того, что $B_0(0)\neq 0$; $A_0(1)\neq 0$ отсюда получаем, что $\eta_0=\xi_1=0$. Далее при $\lambda = 3$ из (5), а при $\lambda = 2$ из (6) получаем:

$$\begin{cases} A_0(3)\xi_3 + A_1(3)\eta_2 = 0 \\ \qquad\qquad B_0(2)\eta_2 = 0\,. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\eta_2 = \xi_3 = 0$. Наконец, при $\lambda = (n-1)$ из (5), а при $\lambda = n-2$ из (6) получим

$$\begin{cases} A_0(n-1)\xi_{n-1} + A_1(n-1)\eta_{n-2} = 0 \\ \qquad\qquad B_0(n-2)\eta_{n-2} = 0, \end{cases}$$

отсюда следует, что $\eta_{n-2} = \xi_{n-1} = 0$.

Далее при значении $\lambda = 1 \pm kn, 3 \pm kn, \ldots, (n-1) \pm kn$ из уравнения (5) и при значении $\lambda = \pm kn, 2 \pm kn, \ldots, (n-2) \pm kn$ из уравнения (6) поочередно находим, что $\xi_{2k+1} = \eta_{2k} = 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, а коэффициенты $\xi_{1-kn}, \xi_{3-kn}, \ldots \xi_{(n-1)-kn}, \eta_{-kn}, \eta_{2-kn}, \ldots, \eta_{(n-2)-kn}$, $(k = 2,3,\ldots)$ определяются в зависимости от $\xi_{-1}, \xi_{-3}, \ldots \xi_{-(n-1)}, \eta_{-2}, \ldots, \eta_{-n}$ по следующим формулам:

$$\xi_{\lambda_j - kn} = -\frac{1}{A_n(\lambda_j - (k-1)n)}\Big[\sum_{p=0}^{n-2}{}'' A_p(\lambda_j - (n-1)n)\xi_{\lambda_j - (k-1)n - p} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1}{}' A_p(\lambda - (k-1)n)\eta_{\lambda_j - (k-1)n - p}\Big]$$

$$\eta_{\lambda_i - kn} = -\frac{1}{B_n(\lambda_i - (k-1)n)}\Big[\sum_{p=0}^{n-2} B_p(\lambda_i - (k-1)n)\eta_{\lambda_i - (k-1)n - p} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} B_p(\lambda_i(n-1)n)\xi_{\lambda_i - (k-1)n - p}\Big]$$

$$k = 2,3,\ldots;\ \lambda_j = 1,3,\ldots,(n-1),\ \lambda_i = 0,2,\ldots,(n-2).$$

Коэффициенты $\xi_{\lambda_j - kn}$ и $\eta_{\lambda_i - kn}$ допускают оценки

$$\left|\xi_{\lambda_j - kn}\right| \le \frac{A^k}{k^{k\,\frac{2m_n + n - m_{n-1}}{2}}},$$

$$\left|\eta_{\lambda_i - kn}\right| \le \frac{B^k}{k^{k\,\frac{2m_n + n - m_n - 1}{2}}},$$

что обеспечивает сходимость рядов (6) в пространстве $\left(S_0^\beta\right)'$ с некоторым $\beta > 1$.

Пусть теперь λ' - корень многочлена $R_n(\lambda)$. Задавая $\xi_{\lambda_1 - n}$ $\eta_{\lambda_1 - n}$ произвольно и $\xi_{\lambda_1 - p - kn} = \eta_{\lambda_1 - p - kn} = 0$ для значений $p = 0,1,\ldots,n-1; k = 0,1,2,\ldots,$ найдем все значения ξ_λ и η_λ, принадлежащие арифметической прогрессии, построенной над λ' с разностью n. При этом из системы (5)-(6) получаем:

$$\xi_{\lambda'-kn}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{q=1}^{k-1}A_0(\lambda'-qn)}{\prod_{q=1}^{k-1}A_n(\lambda'-qn)},\quad \eta_{\lambda'-kn}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{q=1}^{k-1}B_0(\lambda'-qn)}{\prod_{q=1}^{k-1}B_n(\lambda'-qn)}.$$

Отсюда следует, что, $\xi_{\lambda'-kn}$ и $\eta_{\lambda'-kn}$ при $k\to\infty$ удовлетворяют оценкам

$$\left|\xi_{\lambda'-kn}\right|\le\frac{A^k}{k^{k(m_n+n+m_0)}},\ A=const,\qquad \left|\eta_{\lambda'-kn}\right|\le\frac{B^k}{k^{k(m_n+n-m_0)}},\ B=const.$$

.

Ряд (6) с этими коэффициентами $\xi_{\lambda'-kn}$ и $\eta_{\lambda'-kn}$ сходится в пространстве $\left(S_0^\beta\right)'$ с некоторым $\beta>1$, и тем самым корень λ' многочлена $R_n(\lambda)$ определяет два линейно независимых решения уравнения (1). Так как степень многочлена $R_n(\lambda)$ равна m_n, то $R_n(\lambda)$ имеет m_n корней. Обозначим их через $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m_n}$. По условию теоремы эти корни не являются обобщенно кратными. Поэтому они определяют $2m_n$ линейно независимых решений уравнения (1). Эти решения можно записать в виде:

$$y_j=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{\lambda_j-kn}f^{\lambda_j-kn}(x)$$

$$z_j=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_{\lambda_j-kn}g^{\lambda_j-kn}(x),$$

где

$$\xi_{\lambda_j-kn}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{q=1}^{k-1}A_0(\lambda_j-qn)}{\prod_{q=1}^{k-1}A_n(\lambda_j-qn)};$$

$$\eta_{\lambda_j-kn}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{q=1}^{n}B_0(\lambda_j-qn)}{\prod_{q=1}^{n}B_n(\lambda_j-qn)}.$$

Итак, теорема доказана при четном *n*. При нечетном n теорема доказывается аналогичными рассуждениями. При нечетном n многочлен $A_n(\lambda)$ имеет $\frac{2m_n+n-1}{2}$ корней, а многочлен $B_n(\lambda)$ имеет $\frac{2m_n+n+1}{2}$ корней. По структуре системы (5)-(6) легко заметить, что в этом случае ξ_λ и η_λ поменяются ролями. Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. Среди линейных комбинаций, упомянутых в теореме 2, содержится $2m_n$ линейно независимых, m_n из которых равны нулю при $x<0$, а остальные m_n равны нулю при $x>0$.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 2 размерность подпространства Ω равна $(2m_n+n)$.

Доказательства этих теорем ничуть не отличается от доказательства аналогичных теорем в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.С. Фундаментальная система решений некоторых линейных сингулярных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций // Вестник БГУ, серия физ.-мат.наук, 2006, №3, с.50-63.
2. Алиев Ф.С. Формулы многократного дифференцирования и умножения на степени x некоторых обобщенных функций //Odlar Yurdu Universitetinin elmi və pedaqoji xəbərləri. Fizika, riyaziyyat, texnika və təbiət elmləri seriyası, 2000, №4, с.79-86.
3. Aliyev F.S. Multiple differentiation formula of some generalized functions // Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of physical-technical. and mathematical sciences, №1, «Elm» publishing house, 2001, v. 21, p.30-39.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959, 470 с.
5. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1971, 576 с.
6. Митягин Б.С., Эскин Г.И. О регуляризации $\left(S_0^\beta\right)$ экспоненциально растущих в нуле функций // Вестник Московского Университета, серия математика, механика, 1966, №2, с.18-21.
7. Митягин Б.С. О бесконечно дифференцируемой функции с заданными значениями производных в точке //ДАН СССР, 1961, т.138, №2, с. 289-292.

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR FƏZASINDA ADİ SİNQULYAR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ HAQQINDA

F.S.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə $\left(S_0^\beta\right)'$ $(\beta>1)$ fəzasında

$$Ly \equiv \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_p} a_{kp} x^{k+p} y^{(k)}(x) = 0,$$

$m_n > m_p > 0,\ p=0,1\ldots,n-1,\ a_{m_n n} \neq 0\ \ a_{00} \neq 0$

tənliyinə baxılır. Bu fəzada tənliyin fundamental həllər sistemi qurulur.

ON THE SOLUTIONS IN GENERAL FUNCTIONS OF ORDINARY LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

F.S.ALIYEV

SUMMARY

The presented article considers the next equation

$$Ly \equiv \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{m_p} a_{kp} x^{k+p} y^{(k)}(x) = 0\,,$$

$m_n > m_p > 0,\ p = 0,1\ldots,n-1,\ a_{m_n n} \neq 0\ \ a_{00} \neq 0$

in the space $(S_0^{\beta})'$ with some $\beta > 1$. The fundamental system of solutions in this space is constructed.